الباب الأول

مراجعة عامة في بعض المبادئ الرياضية

يحتاج الطالب في دراسته للأساليب الإحصائية إلى استعمال بعض العمليات والمبادئ الرياضية الأساسية. ولما كان عدم إتقان الطالب لمثل هذه العمليات والمبادئ يعيقه عن فهم مادة الإحصاء التي سيتعلمها، فقد رأيت أن أبدأ معه في مراجعتها وتدريبه عليها حتى يستطيع استخدامها بكل يسر وسهولة. وإذا وجد الطالب أن هذه المراجعة غير كافية، وأنها لا توصله إلى الهدف المنشود، فإني أنصحه أن يرجع إلى كتب الرياضيات التي تعالج مثل هذه المواضيع بدرجة أكثر من الإسهاب والتفصيل.

وفيما يلي شرح لهذه المبادئ مع بعض الأمثلة التوضيحية عليها:

1- **المعدل الحسابي** Arithmetical Average

يعرف المتوسط الحسابي (المعدل) لعدة قيم على أنه المجموع الجبري لهذه القيم، مقسوماً على عددها. فإذا كانت القيم هي:

$س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، س ن

على الترتيب، كان المتوسط الحسابي لها ($\overline{س}$) كالتالي:

$$\overline{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + ...+ س}{ن}$$

حيث أن ن تشير إلى عدد هذه القيم

مثال:

جد المتوسط الحسابي للكميات التالية:

8 ، -5 ، 4 ، 7 ، -3

الحل:

المجموع الجبري لهذه الكميات = 8 - 5 + 4 + 7 -3 = 11

$\therefore$ المتوسط = $\frac{11}{5}$ = 2,2

2- **المعدل الهندسي** Geometrical Average

يعرف المتوسط الهندسي للكميات:

$س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$.

على أنه الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الكميات في بعضها البعض. أي أن المتوسط الهندسي لهذه الكميات هو:

$$\sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times س_3 \times .... \times س_ن}$$

والأمثلة التالية توضح طريقة حساب هذا النوع من المتوسطات.

مثال (1):

جد المتوسط الهندسي للعددين 3 ، 12

الحل:

$$\sqrt{3 \times 12} = 36$$

$$= 6$$

مثال (2):

جد المتوسط الهندسي للاعداد :3 ، 9 ، 64

الحل:

المتوسط الهندسي المطلوب = $\sqrt[3]{3 \times 9 \times 64}$

$$= 12$$

3- **الجذر التربيعي** Square Root

الجذر التربيعي لعدد ما هو ذلك العدد الذي إذا ضرب في نفسه نتج العدد الأصلي.

فمثلاً إذا كان الجذر التربيعي للكمية أ هو س فإن:

$$أ = س \times س = س^2$$

أو أن: $س = \sqrt{أ}$

ويستخرج الجذر التربيعي عادة إما بطرق حسابية أو باستعمال جداول خاصة أعدت لهذا الغرض. وفيما يلي شرح لكل هذه الطرق:

أ- استخراج الجذر التربيعي باستعمال التحليل إلى العوامل:

لاستخراج الجذر التربيعي لأي عدد بطريقة التحليل إلى العوامل يشترط ما يلي:

1- أن يكون العدد قابلاً للتحليل إلى عوامل أولية.

2- أن يكون جذره التربيعي عدداً صحيحاً.

فإذا توفر هذان الشرطان، نحلل العدد إلى عوامله الأولية، وبعدها نأخذ عاملاً واحداً من بين كل زوج. من العوامل المتشابهة، ونضرب العوامل المأخوذة بعضها ببعض، فيكون حاصل الضرب الناتج هو الجذر التربيعي المطلوب.

مثال:

جد الجذر التربيعي للعدد 900 باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل:

الحل:

$$\sqrt{900} = \sqrt{5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2}$$

$$\therefore \sqrt{900} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

ب- استخراج الجذر التربيعي بالطريقة العامة:

تستعمل الطريقة العامة في إيجاد الجذر التربيعي، بصفة خاصة، في حالة الأعداد التي لا يسهل تحليلها إلى العوامل، وكذلك في حالة الأعداد التي لا يوجد لها جذور صحيحة. ويمكن التعرف على معالم هذه الطريقة من خلال استخدامها في حل المثال التالي:

مثال:

جد الجذر التربيعي للعدد 53452

الحل:

نقسم العدد المعطى إلى أزواج مبتدئين من اليمين هكذا:

5 ، 34 ، 52

ثم نضع العدد بعد تجزئته إلى خانات زوجية على الصورة التالية:

$\sqrt{5،\ 34،\ 52}$	أ
	ب

بعد ذلك نسير في إيجاد الجذر التربيعي حسب الخطوات التالية:

1) نفتش عن الجذر التربيعي لأكبر عدد موجود ضمن مجموعة الأرقام الواقعة في الجهة اليسرى (وهي 5 في هذه الحالة)، وهذا الجذر هو 2 حيث أن أكثر عدد له جذر تربيعي تام ضمن الـ 5 هو 4. نضع قيمة هذا الجذر في المكان المشار اليه بالرمز أ ونطرح مربعه من العدد 5 كما هو مبين أدناه:

أ	2	$\sqrt{5 \text{ ، } 34 \text{ ، } 52}$
ب		4
		1

2) والآن ننزل الزوج 34 ونضعه إلى يمين باقي الطرح (أي إلى يمين الواحد)، ونضع في المكان المشار اليه بالرمز ب ضعف العدد الموجود في المكان أ (أي4). بعد ذلك نفتش عن العدد الذي يمكن وضعه إلى يمين الأرقام الحاصلة في المكانين أ ، ب ، والذي إذا ضرب في العدد الذي سيتكون في المكان ب يكون حاصل الضرب الناتج مساوياً لأكبر عدد ضمن الـ 134. وبالتجربة نجد أن العدد المطلوب هو3. والآن نضرب 43 في 3 ونطرح الناتج من 134 كما هو موضح أدناه:

		$\sqrt{5 \text{ ، } 34 \text{ ، } 52}$
أ	23	4
ب	43	134
	3	129
		005

2) وأخيراً ننزل الزوج 52 ونضعه أمام الرقم 5 (باقي الطرح)، ونضع في المكان المشار اليه بالرمز حـ ضعف العدد المتكون في المكان أ، (أي 46). بعد ذلك نفتش، كما في الخطوة السابقة، عن العدد الذي يمكن وضعه إلى يمين الأرقام الحاصلة في المكانين أ ، حـ والذي إذا ضرب في العدد الذي سيتكون في المكان حـ كان حاصل الضرب مساوياً لأكبر عدد ضمن ألـ 552. وبالتجربة نجد أن العدد المطلوب هو واحد. والآن نضرب 1 في461 ونطرح الناتج من 552 كما هو موضح أدناه:

		$\sqrt{5 ، 34 ، 52}$
أ	231	4
ب	4 3	134
	3	129
حـ	461	00552
	1	461
		019

فيكون الجذر التربيعي المطلوب هو 231 تقريباً.

4) وإذا أردنا أن نتابع العملية بعد الانتهاء من إنزال جميع أزواج العدد فإننا نضع فاصلة إلى يمين العدد 231 ، وننزل زوجاً من الأصفار إلى يمين الطرح (91)، ونكمل العملية كالسابق، ويمكن تكرير هذه الخطوة (إنزال صفرين إلى يمين باقي الطرح في كل مرة) حتى نحصل من ذلك على العدد المطلوب من الخانات العشرية.

إيجاد الجذر التربيعي لعدد كسري باستخدام الطريقة العامة:

في حالة كون العدد المطلوب إيجاد جذره التربيعي عدداً كسرياً فإن عملية استخراج الجذر التربيعي له لا تختلف عن الحالة السابقة إلا في كيفية تجزئة العدد إلى خانات زوجية. ففي حالة كون الخانات العشرية زوجية العدد يجري التقسيم كما ورد في الحالة السابقة تماماً. أما إذا كانت فردية العدد فنضيف صفراً واحداً إلى يمينها حتى تصبح زوجية، ومن ثم تقسم إلى خانات زوجية كالمعتاد. وفي كل حالة يجب الانتباه إلى مكان الفاصلة في الجذر التربيعي الناتج والتي يجب تدوينها في هذا الجذر قبل البدد بإنزال الخانات العشرية مباشرة. والأمثلة التالية توضح المقصود بهذه العملية:

مثال (1):

جد الجذر التربيعي للعدد 24 و 10

الحل:

	$\sqrt{10 \;.\; 24}$
3,2	9
6 2	124
2	124
	000

مثال(2):

جد الجذر التربيعي للعدد 08,362

الحل:

2,89	8. 36 20
48	4
8	436
569	384
9	5220
	5121
	0099

(لاحظ أننا وضعنا صفراً إلى يمين الرقم 2)

حـ الجذر التربيعي باستخدام الجداول:

يمكن استخراج الجذر التربيعي للاعداد، على اختلاف أنواعها، من جداول خاصة أعدت لذلك. ومع أن غالبية هذه الجداول تقتصر على إعطاء الجذور التربيعية للاعداد المحصورة بين الواحد والمئة، ألا أنه يمكن استخدامها أيضاً في إيجاد الجذور التربيعية لكل الأعداد التي هي أكبر من المئة، وذلك عن طريق كتابتها بصور خاصة، كما سنرى فيما بعد.

وبالنظر إلى هذه الجداول (انظر الجدول رقم 1 في نهاية الكتاب)، نجد أنها مصممة على النحو التالي:

1- العمود الأول إلى يمين الجدول ويحتوي على رقمين، وهما يتدرجان من الواحد إلى المئة، وقد أعطي في العمودين اللذين يليانه مربعات هذه الاعداد ثم مكعباتها (ن2 ، ن3 على التوالي). وفي العمود الرابع أعطيت الجذور التربيعية لـلاعداد ن وفي العمود الخامس الجذور التربيعية للاعداد 10 ن ، كما أعطي في الاعمدة الباقية مكعبات العدد ن بأشكاله المختلفة (ن ،10 ن ، 100 ن على التوالي، وكذلك مقلوب هذا العدد (1/ ن).

وبالنسبة للجذور التربيعية للاعداد، وهو مدار بحثنا الحالي، فإذا كان العدد صحيحاً وينحصر بين الواحد والمئة امكن استخراج جذره التربيعي من الجدول مباشرة. فمثلاً الجذر التربيعي للعدد (30) هو 5.477، والجذر التربيعي للعدد(85) هو9.220، وهكذا.

وإذا كان العدد كسرياً، قرب إلى اقرب عدد صحيح واستخرج جذره التربيعي، بعد ذلك. فالجذر التربيعي للعدد 46,3 هو نفس الجذر التربيعي للعدد 46، والجذر التربيعي للعدد63,7 هو نفس الجذر التربيعي للعدد 64، وهكذا.

وإذا كان العدد يقع بين المئة والألف، فانه يقرب إلى عشرات ويوضع على الشكل10 ن. فإذا اردنا استخراج الجذر التربيعي للعدد 752 مثلاً، فانه يكتب بعد التقريب إلى عشرات على النحو التالي:

$$75\times 10 = 752$$

ويستخرج جذره التربيعي من تقاطع السطر الذي يبدأ بالرقم 75 والعمود الذي على رأسه العنوان $\sqrt{10ن}$ ، وهو في هذه الحالة 386 ,27.

اما إذا كان العدد بين الالف والعشرة آلاف، فيحول إلى الصورة 100 ن وذلك عن طريق تقريبه إلى مئات، وابقائه على رقمين معنويين، فيكون جذره في هذه الحالة هو $10\sqrt{ن}$. فلايجاد الجذر التربيعي للرقم 2593 وفق هذه الطريقة، نقول انه يساوي 100 × 26 تقريباً، وبذلك يكون جذره التربيعي

$$\sqrt{26} \times 10$$

$$5,099 \times 120 =$$

$$50,99 =$$

وهكذا.

4- **التقريب** Approximation

تدخل عملية التقريب في الكثير من الأمور الإحصائية، خصوصاً تلك المتعلقة منها بتدوين البيانات الخام في جداول خاصة. ففي كثير من الحالات يطلب تقدير الكميات المعدودة والداخلة في الجدول بوحدة العشرات أو المئات أو الألوف، ...آلخ رغم كون هذه الكميات ليست عشرات أو مئات أو ألوفاً تامة. ومن الأمثلة على ذلك الجداول المتعلقة بأعداد السكان أو بمقادير الصادرات أو الواردات، إلى غير ذلك من الأشياء التي تكون أعدادها غالباً كبيرة.

وقد جرت العادة أن يقرب نصف الوحدة أو أي كسر أكبر منه إلى الوحدة الكاملة، وأن تهمل كل الأجزاء التي هي أقل من النصف. فإذا كنا نقرب إلى عشرات مثلاً، أمكن اعتبار كل القيم:-

5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 عشرات كاملة،

كما أن الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4

تهمل ويعتبر كل منها مساوياً صفراً في هذه الحالة.

وبناء على ما سبق فإن العدد 456725 يساوي 456730 إذا قرب إلى عشرات، ويساوي 456700 إذا قرب إلى مئات، ويساوي 457000 إذا قرب إلى ألوف، وهكذا.

وفي حالة الكسور العشرية يضاف واحد إلى الخانة المقرب إليها إذا كانت الخانة المقربة مقدارها 5 أو أكثر، ولا يضاف أي شيء إذا كانت 5 أو أقل. فمثلاً الكسر 0,5426 يصبح مساوياً 0,543 اذا ما قرب إلى ثلاث خانات عشرية.

ومما يجدر ذكره أن بعض المسائل تتطلب إيجاد أجوبة مقربة إلى عدد معيّن من الخانات. وفي مثل هذه الحالات يعمل على استخراج الأجوبة بحيث تكون عدد خاناتها أكثر بواحدة من العدد المطلوب، ومن ثم يقام باجراء التقريب المطلوب. فإذا طلب إيجاد الجذر التربيعي للعدد 517 إلى ثلاث خانات عشرية مثلاً، نجد هذا الجذر إلى أربع خانات، ثم نعمد بعد ذلك إلى تقريب الجواب الناتج إلى ثلاث خانات، وهكذا.

5- **النسبة المئوية** Percentage

النسبة المئوية بين عددين هي خارج قسمة أحدهما على الآخر مضروباً في مئة، فإذا كان العدد الأول أ وكان العدد الثاني ب كانت النسبة المئوية المطلوبة:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times 100$$

مثال:

أعطي مدرس الرياضيات في بداية العام فحصاً لأحد الطلاب، فحصل على علامة مقدارها 45، ولما أعطى الفحص نفسه للطالب في نهاية العام حصل على علامة مقدارها 85، فما هي النسبة المئوية لتقدمه.

تقدم الطالب = 85 - 45 = 40 علامة

نسبة تقدم الطالب المئوية = 40 × 100 = 88,9% تقريباً.

6- بعض المبادئ الأساسية في الجبر

تعاريف:

1) الحد الجبري هو كمية جبرية تتألف من رمز جبري واحد أو أكثر يربط بينها علامات الضرب أو القسمة وذلك مثل:

4 أ^2 ، $\frac{3}{5}$ أ ب^{2}جـ، $\frac{2\text{س}^2}{5\text{س}^3}$

2) المقدار الجبري هو عبارة عن حد جبري واحد أو أكثر يفصل بينهما علامات الجمع والطرح (+ ، −) وذلك مثل:

س^3-2 س ص، أ^2 - 3 أ ب + ب^2

3) الحدود الجبرية المتشابهة، هي ما كانت تختلف عن بعضها البعض في الإشارة أو المعامل فقط. فالحدود التالية:

3 س^2 ص، س^2 ص، $\frac{2}{3}$ س^2 ص كلها متشابهة

أما الحدود:

2 س ص، - 5س^3 ص، $\frac{3}{2}$س^3 ص^2

فهي ليست متشابهة وذلك لاختلاف قوى الرموز الداخلة فيها.

6- المعادلات البسيطة

تعاريف:

المعادلة البسيطة هي ما كانت قوة المتغير فيها من الدرجة الأولى. ولحل المعادلة من هذا النوع نتبع الخطوات التالية:

1- نفك الاقواس إذا كانت المعادلة تحوي على أي منها.

2- إذا كانت المعادلة تحوي كسوراً نتخلص منها بضرب جميع حدود المعادلة في المضاعف المشترك الاصغر لهذه الكسور.

3- نضع المجاهيل في طرف واحد من المعادلة ونضع الاعداد في الطرف الآخر.

4- عند نقل أي مجهول أو عدد من طرف لآخر نغير إشارته.

5- نقوم باختصار الكميات المتجمعة في كل طرف إذا كان هناك مجال للاختصار.

6- نقسم طرفي المعادلة على معامل الكمية المجهولة فيكون الناتج هو قيمة المجهول المطلوب.

مثال:

جد قيمة س فيما يلي:

3 س + 5(2 س -1) = 3 - 4 (س- 1)

الحل:

نفك الاقواس

3 س + 10 س − 5 = 3 - 4 س+4

ننقل المجاهيل إلى الطرف الايمن والاعداد إلى الطرف الايسر مع تغيير الرشارات الخاصة بالحدود المنقولة.

3 س + 10 س + 4 س = 3 + 5 + 4

نختصر الطرفين: 17 س = 12

∴ س = $\frac{12}{17}$

تمارين

1) ستة أشخاص متوسط أعمارهم 30 سنة، فإذا كان متوسط أعمار ثلاثة منهم 35سنة ومتوسط عمري الرابع والخامس 26سنة، فكم سنة عمر السادس؟

2) 12 شخصاً متوسط ما مع خمسة منهم 50 قرشاً ومتوسط ما مع أربعة آخرين منهم 40 قرشاص فكم متوسط ما مع الثلاثة الباقين علماً بأن متوسط ما مع الجميع 42 قرشاً.

3) أوجد المتوسط الهندسي للاعداد: 1 ، 15 ، 20

4) ثلاثة أعداد متوسطها الهندسي15، فاذا كان اثنان منها هما 9، 15 فما هو العدد الثالث؟

5) اذا باع تاجر بضاعة بمبلغ 1150 ديناراً وربح فيها 15%، فكم يبيعها ليربح بها 25%؟